CHAPITRE 5 :
Étude de quelques phénomènes d'explosion

Dans les chapitres précédents, on a vu passé en revue plusieurs types d'équations, pour lesquelles on a étudié le problème de Cauchy. Dans le meilleur des cas, on a montré l'existence et l'unicité globale de solutions.

Mais l'étude des EDP ne s'arrête pas là : une fois que l'on dispose d'une solution, on peut chercher à déterminer ses propriétés qualitatives :

- Comportement asymptotique lorsqu'un petit paramètre tend vers zéro (pénalisation singulière, homogénéisation ...)
- Comportement en temps long
- Phénomènes d'explosion
- Stabilité d'états stationnaires

etc.

L'étude de ces phénomènes fait l'objet de plusieurs cours de spécialisation au second semestre.
Dans ce court chapitre, on donne comme exemples deux phénomènes d'explosion : pour l'équation de Schrödinger (étudiée au chapitre précédent),

et pour l'équation de Keller - Segel.

I) Équation de Schrödinger focalisante :

Dans ce paragraphe, on considère l'équation

$$(NLS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^a u & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

avec $a \geq 0$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

On rappelle que si $a \in [0, \frac{4}{N}[$, alors l'équation (NLS) admet une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.

Exercice : On suppose $a < \frac{4}{N}$. Pour $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{a+2}\|v\|^{a+2}_{L^{a+2}(\mathbb{R}^N)}$$

En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, montrer que si $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|v\|^{a+2}_{L^{a+2}} \leq C\|\nabla v\|^{\frac{aN}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|^{2+\frac{a(2-N)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ la solution de (NLS). En utilisant la conservation de la masse, montrer que $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^N))$.

Dans la suite de ce paragraphe, on se place dans le cas $\boxed{a \geq \frac{4}{N}}$, pour lequel des phénomènes explosifs apparaissent.

Théorème (critère de Glassey). Soit $a \in \left[\frac{4}{N}, \frac{4}{N-2}\right[$

Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, et soit $u \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution maximale de (NLS), définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On suppose que $E(u_0) < 0$ et que $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u_0(x)|^2 dx < +\infty$.

Alors la solution explose en temps fini dans H^1 : $\operatorname{Sup} I, \operatorname{Inf} I \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{t \to (\operatorname{Sup} I)^-} \|u(t)\|_{H^1} = \lim_{t \to (\operatorname{Inf} I)^+} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

Démonstration : On commence par un calcul formel, dit <u>calcul de viriel</u>, que l'on justifie rigoureusement dans un second temps.

Supposons que u est suffisamment régulière et décroissante (en x). Alors, pour tout $t \in I$,

$$\partial_t \int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx = 2 \operatorname{Re} \int |x|^2 \partial_t u \, \bar{u}$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int |x|^2 (i|u|^a u + i\Delta u)\, \bar{u}$$

$\mathrm{Im}(i\bar{x}) = -\mathrm{Re}\, x$

$$= -4\,\mathrm{Re}\left(i \int \bar{u}\, \nabla u \cdot x\right)$$

$$= +4\,\mathrm{Im}\left(\int \bar{u}\, \nabla u \cdot x\right)$$

En dérivant une fois de plus en temps, on obtient

$$\partial_t^2 \int |x|^2\, |u(t,x)|^2\, dx$$

$$= 4\,\mathrm{Im} \int \bar{u}_t\, \nabla u \cdot x \quad + 4\,\mathrm{Im} \int \bar{u}\, \nabla u_t \cdot x$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\left(\int \left(-i|u|^a \bar{u} - i\Delta\bar{u}\right) \nabla u \cdot x\right)$$

$$- 4\,\mathrm{Im}\left(\int u_t\, \nabla \bar{u} \cdot x\right) - 4\,\mathrm{Im} \int \bar{u}\, u_t\, N$$

$$= 8\,\mathrm{Re} \int |u|^a \bar{u}\, \nabla u \cdot x$$

$$+ 8\,\mathrm{Re} \int \Delta\bar{u}\, \nabla u \cdot x$$

$$- 4N\,\mathrm{Im}\left(\int \bar{u}\left(i|u|^a u + i\Delta u\right)\right)$$

Or: $2\mathrm{Re}\left(\int |u|^a\, \bar{u}\, \nabla u \cdot x\right) = \int |u|^a\, \nabla |u|^2 \cdot x$

$$= \frac{2}{a+2} \int \nabla |u|^{a+2} \cdot x$$

$$= -\frac{N}{a+2} \int |u|^{a+2}$$

et $\displaystyle \int \Delta\bar{u}\, \nabla u \cdot x = \sum_{1 \le i,j \le n} \int \partial_{jj}\bar{u}\, \partial_i u\, x_i$

$$= -\sum_{i,j} \int \partial_j \bar{u}\, \partial_i \partial_j u\, x_i - \sum_{i=1}^{N} \int |\partial_i u|^2$$

Donc $2\,\mathrm{Re}\left(\int \Delta \bar{u}\, \nabla u \cdot x\right)$ $\qquad x+iy$

$$= -2\int|\nabla u|^2 - \int \nabla |\nabla u|^2 \cdot x$$

$$= -2\int|\nabla u|^2 + N\int|\nabla u|^2 = (N-2)\int|\nabla u|^2 .$$

Enfin,

$$-4\,\mathrm{Im}\left(i\int \bar{u}\,\Delta u\right) = -4\,\mathrm{Re}\int \bar{u}\,\Delta u$$

$$= +4\,\mathrm{Re}\int|\nabla u|^2 = 4\int|\nabla u|^2 .$$

En rassemblant tous les termes, il vient :

$$\partial_t^2 \int |x|^2 |u(t,x)|^2\, dx$$

$$= -\frac{4N}{a+2}\int|u|^{a+2} + 4(N-2)\int|\nabla u|^2 + 4\int|\nabla u|^2$$